8a MOSTRA ACADÊMICA UNIMEP
26 a 28/10 de 2010
Tema: Desafios da Educação Superior na Agenda do Novo Milênio

18º Congresso de Iniciação Científica

FORMA QUADRÁTICA: O MÉTODO DE BOOLE PARA CALCULAR OS SEUS INVARIANTES

Autor(es)

LUANA CRISTINA DE OLIVEIRA

Orientador(es)

JOANA DARC DA SILVA REIS, ADRIANA CÉSAR DE MATTOS

Apoio Financeiro

FAPIC/UNIMEP

1. Introdução

RESUMO
Foi realizado o estudo do artigo Exposition of a General Theory of Linear Transformations – Parte II cujo objetivo foi entender os métodos empregados por Boole para determinar uma relação entre coeficientes dos quânticos e aplicá-los na quadrática binária.
2.1. Introdução
O projeto maior intitulado “A análise do processo de reconhecimento na História da Matemática”, sob responsabilidade da proponente, tem como objetivo responder sobre a emergência de Arthur Cayley na História da Matemática fixando dois aspectos: as estruturas de reconhecimento e o epistemológico.
A Teoria dos Invariantes foi desenvolvida por Arthur Cayley e Joseph Sylvester principalmente entre 1840 e 1850 na Inglaterra (Crilly, 1986). Os cálculos são gigantescos, a conseqüência foi a perda de força da teoria no início do século XX. O objetivo é cálculo dos invariantes da forma quadrática (a,b,c)(x,y)2 utilizando o método de Boole (1841).
Segundo Crilly (1986) e Parshall (2006, 1996) o artigo de George Boole publicado em 1841 intitulado “Exposition of a General Theory of Linear Transformations” foi a motivação para Cayley e Sylvester. Fisher (1996) também assume que este artigo marca o início da Teoria dos Invariantes.
Boole (1841) iniciou seu trabalho defendendo que as transformações de formas homogêneas por substituições lineares tem sido um problema recorrente em análise.

De acordo com Parshall (2006) James Joseph Sylvester e Arthur Cayley, especialmente durante 1850 a 1856, construíram a base da “British theory of invariants”. De fato, eles “…put the Britain on the international map algebraically” (p.186) (…) “… the area of algebraic research that dominated the British mathematical scene was invariant theory” (p.188).

Para entender o presente texto é condição necessária entender as definições pelo menos de quântico (polinômio homogêneo) e de invariante, somente desse modo o “resumo” adquirirá sentido.

2. Objetivos

O objetivo deste trabalho foi o estudo do método de Boole (1841) para verificar a relação entre os coeficientes dos sistemas de equações homogêneas.

3. Desenvolvimento

A pesquisa, de natureza bibliográfica, desenvolveu o estudo do artigo de George Boole “Exposition of a General Theory of Linear Transformations”, publicado em 1841, e de textos auxiliares, tais como os artigos de Crilly (1986), Parshall (1998, 2006) e Elliott (1895).
A Teoria dos Invariantes estuda as propriedades intrínsecas dos polinômios, propriedades que não são afetadas por uma mudança de variáveis. O objetivo é transformar uma forma em outra.
Conforme citado na “introdução” as duas definições são:

Definição de quântico (Elliott,1895) :

Anexo 1

Cayley (1854) denota o quântico pela expressão: (a0, a1, a2, a3, ...ap) (x, y)p.

Definição de invariante :

Um invariante de uma forma homogênea (Boole, 1841) ou quântico (Cayley, 1854) é uma função f dos coeficientes da forma ou quântico transformado que se iguala à mesma função f dos coeficientes da forma original multiplicado por uma função dos coeficientes da transformação linear.

Dado o p-ic binário: (a0, a1, a2, ...ap)(x, y)p para obtermos o invariante devemos transformá-lo pela substituição linear:

Anexo 1

Sendo A0, A1, A2, ...Ap funções de a0, a1, a2, a3, ...ap e l, m, l’, m’ então
f (a0, a1, a2, ...ap) será um invariante se satisfaz a condição :

Anexo 1

Exposition of a General Theory of Linear Transformations – Parte II

De acordo com a Parte I do artigo de Boole (1841) as formas homogêneas:

Anexo 1 Equação (1)

Anexo 1 Equação (2)

Anexo 1 Equação (3)

Anexo 2 Equação (4)

Anexo 2 Equação (5)

Anexo 2 Equação (6)

Anexo 2 Equação (7)

Quando o sistema (4) é linear, a igualdade em (6) não é interpretável, utiliza-se outro caminho. Seja o sistema de equações lineares :

Anexo 2 Equação (8)

E seja E uma função de coeficientes obtidas por meio de eliminação de variáveis dos segundos membros das equações acima e igualadas a zero. Seja E1 uma função similar de constantes envolvidas nos primeiros membros de qualquer m equações do sistema original (4), e E2 a função das constantes envolvidas nos segundos membros das mesmas equações dos primeiros membros.

Anexo 2 Equação (9)

Seja U uma função de x1,x2,...,xm e linearmente transformada em V, uma função de y1,y2,...,ym em razão das relações em (8). Por diferenciação é obtido sistema:

Anexo 2 Equação (10)

Anexo 2 Equação (11)

Anexo 3 Equação (12)

Anexo 3 Equação (13)

Desde que x1,x2,...,xm sejam independentes, dx1,dx2,...,dxm também são independentes, em (10) elas estão linearmente conectadas a dy1,dy2,...,dym do mesmo modo que x1,x2,...,xm estão relacionadas com y1,y2,...,ym .

4. Resultado e Discussão

Forma quadrática binária:

Anexo 3

Aplicando (6):

Anexo 3

Aplicando (7):

Anexo 3

5. Considerações Finais

Conforme proposta deste estudo, foi possível encontrar os invariantes da forma quadrática binária, através do estudo do artigo de George Boole Exposition of a General Theory of Linear Transformations – Parte II, publicado em 1841 no journal The Cambridge Mathematical Journal e análise da relação entre coeficientes dos quânticos e sua aplicação na forma quadrática binária

Referências Bibliográficas

BALL, W.W. R. A short Account of the History of Mathematics. Second edition. London: Macmillian an CO., Limited: 1893.
BOYER, C.B. História da Matemática. Edgard Blücher. São Paulo. 1974.
BOOLE, G., 1841, “Exposition of a general theory of linear transformations”, The Cambridge Mathematical Journal. vol.III, November, Part. I.
BOOLE, G., 1841, “Exposition of a general theory of linear transformations”, The Cambridge Mathematical Journal. vol.III, November, Part. II.
CAJORI, F. A History of Mathematics. Macmillan & Co.: New York & London, 1938.
CRILLY, T. Arthur Cayley Mathematician Laureate of the Victorian Age. Baltimore, The John Hopkins University Press, 2004.
_______ The Rise of cayley’s Invariant Theory (1841-1862). Historia Mathematica. V.13, 1986, p. 241-254.
_______The young Arthur Cayley. Notes and Records of the Royal Society. London, v.52 (2), 1998, pp.267-282.
CAYLEY, A. An Introductory memoir on quantics. Philosophical Transaction of Royal Society of London. London, 1854b, 144, pp. 244-258.
ELLIOT, E. B. An Introduction to the Algebra of Quantics, Oxford: At the Claredon Press, 1895.

FISHER, S.C. The Death of a Mathematical theory : a Study in the Sociology of Knowledge. Archive for the History of Exact Sciences, 3, 1996.
MATTOS,A.C. The process of recognition in the History of Mathematics. Report. London South Bank University, 2006.

PARSHALL, K. H., The British development of the theory of invariants (1841-1895). BSHM Bulletin. 2006, 21, 186-199.

PARSHALL, K. H., James Joseph Sylvester: Life and Work in letters. Oxford, Clarendon Press: 1998.

Anexos

$$\sum ka_1 x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \ldots x_m^{\mu} = \sum kb_1 y_1^{\alpha} y_2^{\beta} \ldots y_m^{\mu} \ldots\ldots q_1 = r_1$$

....

$$\sum ka_p x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \ldots x_m^{\mu} = \sum kb_p y_1^{\alpha} y_2^{\beta} \ldots y_m^{\mu} \ldots\ldots q_p = r_p \qquad (4)$$

$$\sum kA x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \ldots x_m^{\mu} = \sum kB y_1^{\alpha} y_2^{\beta} \ldots y_m^{\mu} \ldots\ldots\ldots Q = R$$

$$\theta(Q + h_1 q_1 + h_2 q_2 + \ldots + h_p q_p) = 0 \ldots e \ldots \theta(R + h_1 r_1 + h_2 r_2 + \ldots + h_p r_p) = 0 \qquad (5)$$

$$\sum\left(a_1 \frac{d}{dA}\right) = \phi_1, \ldots\ldots\ldots\ldots \sum\left(b_1 \frac{d}{dB}\right) = \psi_1,$$

$$\sum\left(a_p \frac{d}{dA}\right) = \phi_p, \ldots\ldots\ldots\ldots \sum\left(b_p \frac{d}{dB}\right) = \psi_p;$$

$$\frac{\phi_1^a \phi_2^b \ldots \phi_p^r . \theta(Q)}{\theta(Q)} = \frac{\psi_1^a \psi_2^b \ldots \psi_p^r . \theta(R)}{\theta(R)} \qquad (6)$$

$$\frac{F(\phi_1^a \phi_2^b \ldots \phi_p^r) . \theta(Q)}{\theta(Q)} = \frac{F(\psi_1^a \psi_2^b \ldots \psi_p^r) . \theta(R)}{\theta(R)} \qquad (7)$$

Quando o sistema (4) é linear, a igualdade em (6) não é interpretável, utiliza-se outro caminho. Seja o sistema de equações lineares :

$$x_1 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_m y_m$$

$$x_2 = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \ldots + \mu_m y_m \qquad (8)$$

....

$$x_m = \rho_1 y_1 + \rho_2 y_2 + \ldots + \rho_m y_m$$

E seja E uma função de coeficientes obtidas por meio de eliminação de variáveis dos segundos membros das equações acima e igualadas a zero. Seja E_1 uma função similar de constantes envolvidas nos primeiros membros de qualquer m equações do sistema original (4), e E_2 a função das constantes envolvidas nos segundos membros das mesmas equações dos primeiros membros.

$$E.E_1 = E_2 \qquad (9)$$

Seja U uma função de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ e linearmente transformada em V, uma função de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ em razão das relações em (8). Por diferenciação é obtido sistema:

$$dx_1 = \lambda_1 dy_1 + \lambda_2 dy_2 + \ldots + \lambda_m dy_m$$

$$dx_2 = \mu_1 dy_1 + \mu_2 dy_2 + \ldots + \mu_m dy_m \qquad (10)$$

$$dx_m = \rho_1 dy_1 + \rho_2 dy_2 + \ldots + \rho_m dy_m$$

$$\frac{dU}{dx_1}.dx_1 + \frac{dU}{dx_2}.dx_2 + \ldots + \frac{dU}{dx_m}.dx_m = \frac{dV}{dy_1}.dy_1 + \frac{dV}{dy_2}.dy_2 + \ldots + \frac{dV}{dy_m}.dy_m \qquad (11)$$

A Teoria dos Invariantes estuda as propriedades intrínsecas dos polinômios, propriedades que não são afetadas por u.. mudança de variáveis. O objetivo é transformar uma forma em outra.

Conforme prometido na "introdução" as duas definições:

Definição de quântico (Elliott,1895):

$a_0x^p + pa_1x^{p-1}y + [(p(p-1)/1.2)a_2x^{p-2}y^2] + [((p(p-1)(p-2))/1.2.3)a_3x^{p-3}y^3 + ... + pa_{p-1}xy^{p-1} + a_py^p$,

Cayley (1854) denota o quântico pela expressão: $(a_0, a_1, a_2, a_3, ...a_p) (x, y)^p$.

Definição de invariante:

Dado o p-ic binário: $(a_0, a_1, a_2, ...a_p)(x, y)^p$ para obtermos o **invariante** devemos transformá-lo pela substituição linear:

$x = l X + m Y$,

$y = l' X + m' Y$,

em $(A_0, A_1, A_2, ...A_p) (X, Y)^p$.

Sendo $A_0, A_1, A_2, ...A_p$ funções de $a_0, a_1, a_2, a_3, ...a_p$ e l, m, l', m' então

$f (a_0, a_1, a_2, ...a_p)$ será um **invariante** se satisfizer a condição :

$f (A_0, A_1, A_2, ...A_p) = \phi (l, m, l', m') f (a_0, a_1, a_2, ...a_p)$

Exposition of a General Theory of Linear Transformations – Parte II

De acordo com a Parte I do artigo de Boole (1841) as formas homogêneas:

$$\sum ka_1x_1^{\alpha}x_2^{\beta}.....x_m^{\mu} = \sum kb_1y_1^{\alpha}y_2^{\beta}.....y'^{\mu}_m \quad q=r \qquad (1)$$

$$\sum kA_1x_1^{\alpha}x_2^{\beta}.....x_m^{\mu} = \sum kB_1y_1^{\alpha}y_2^{\beta}.....y_m^{\mu} \quad Q=R \qquad (2)$$

$$k = \frac{1.2.3...n}{1.2....\alpha.1.2...\beta....1.2....\mu}$$

onde $\alpha + \beta + ... + \mu = n$

$$\theta(Q + hq) = 0,\ \theta(R + hr) = 0$$

$$\frac{\left(\sum a_1 \frac{d}{dA_1}\right)^n \theta(Q)}{\theta(Q)} = \frac{\left(\sum b_1 \frac{d}{dB_1}\right)^n \theta(R)}{\theta(R)} \qquad (3)$$

Observando que $\dfrac{\theta(Q)}{\theta(q)} = \dfrac{\theta(R)}{\theta(r)}$.

$$\frac{d^2U}{dx_1^2}.dx_1^2 + 2\frac{d^2U}{dx_1dx_2}.dx_1dx_2 + \&c = \frac{d^2V}{dy_1^2}.dy_1^2 + 2\frac{d^2V}{dy_1dy_2}.dy_1dy_2 + \&c \qquad (12)$$

$$\sum K \frac{d^nU}{dx_1^a.dx_2^b...dx_m^c}.dx_1^a.dx_2^b...dx_m^c = \sum K \frac{d^nV}{dy_1^a.dy_2^b...dy_m^c}.dy_1^a.dy_2^b...dy_m^c \qquad (13)$$

Desde que $x_1,x_2,...,x_m$ sejam independentes, $dx_1,dx_2,...,dx_m$ também são independentes, em (10) elas estão linearmente conectadas a $dy_1,dy_2,...,dy_m$ do mesmo que $x_1,x_2,...,x_m$ com $y_1,y_2,...,y_m$.

Forma quadrática binária:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A`x`^2 + 2B`x`y` + C`y`^2$$

$$q = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

$$\theta(q) = AC - B^2$$

Aplicando (6):

$$\frac{a(Bx+Cy) - b(Ax+By)}{\sqrt{AC-B^2}} = \frac{a`(B`x`+C`y`) - b`(A`x`+B`y`)}{\sqrt{AC-B^2}}, ou$$
$$\frac{(aB-bA)x + (aC-bB)y}{\sqrt{AC-B^2}} = \frac{(a`B`-b`A`)x` + (a`C`-b`B`)y`}{\sqrt{AC-B^2}}$$

Aplicando (7):

$$\frac{a^2C - 2abB + b^2A}{AC-B^2} = \frac{a`^2C` - 2a`b`B` + b`^2A`}{A`C` - B`^2}$$