8ª MOSTRA ACADÊMICA UNIMEP
26 a 28/10 de 2010
Tema:
Desafios da Educação Superior na Agenda do Novo Milênio

18º Congresso de Iniciação Científica

UM ESTUDO DO ARTIGO: NA INTRODUCTORY MEMOIR UPON QUANTICS - PARTE I

Autor(es)

HUGO HIDEKI CHIDA

Orientador(es)

SAMUEL TANAAMI, ADRIANA CÉSAR DE MATTOS

Apoio Financeiro

VOLUNTÁRIO/UNIMEP

1. Introdução

O presente artigo tem como base a publicação escrita por Arthur Cayley no jornal Cambridge Mathematical Journal em 1845, vol. IV. pg. 193 – 209 com o título: “ON THE THEORY OF LINEAR TRANSFORMATIONS”. O assunto abordado é o início das publicações de Cayley sobre a Teoria dos Invariantes que foi desenvolvida em conjunto com seu amigo James Joseph Sylvester posteriormente. Há também uma grande contribuição de George Boole que, com o conteúdo publicado no mesmo jornal, inspirou-o a desenvolver uma nova teoria, mais geral que a de Boole, para achar os invariantes.
Nesta primeira publicação, que é o objeto de estudo, Cayley chamou de Hiperdeterminante o método que produzia novas expressões que satisfaziam as propriedades herdadas dos invariantes, segundo Parshall.
A continuação destes estudos está na publicação, no mesmo jornal, do “ON LINEAR TRANSFORMATIONS” por Arthur Cayley em 1946 em que faz uma teoria geral sobre os Hiperdeterminants.
“IN continuing my researches on the present subject, I have been led to a new manner of considering the question, which, at the same time that it is much more general…” (On Linear Transformations - From the Cambridge and Dublin Mathematical Journal, vol. I. (1846), pp. 104 122)
A contribuição de Cayley vai além das teorias matemáticas. Como descrito por O´Connor e Robertson, as teorias desenvolvidas por Cayley foram aplicadas na física para estudar o espaço-tempo contínuo e seus trabalhos com matrizes serviram à fundação da mecânica quântica.

2. Objetivos

Este trabalho consiste em desvendar os mecanismos matemáticos descritos por Cayley na publicação “On The Theory Of Linear Transformations”, além disso, qual a sua inserção na história da matemática do século XIX.

3. Desenvolvimento

A natureza da pesquisa foi bibliográfica e desenvolveu os estudos com base na publicação do “On The Theory Of Linear Transformations”, publicado em 1845. Além da análise do tema principal, foram coletadas informações em livros de cunho histórico

específicos sobre a matemática como: “A History of Mathematics: An Introduction”, KATZ, V. J. e História da Matemática, BOYER, C. B.. A análise foi feita extraclasse, assim como em reuniões semanais realizadas na faculdade. Isto se fez necessário para obter uma visão mais ampla da importância das teorias publicadas por Cayley, sua seqüência cronológica e no entendimento das regras e idéias matemáticas utilizadas na época.
Outro fator que necessitou de medidas para mitigar as dificuldades foi às notações e jargões na língua inglesa britânica empregada na época (meados do século XIX). Sendo estas contornadas, até onde possível, com as respectivas consultas bibliográficas e contatos com a professora Doutora Adriana César de Mattos.

4. Resultado e Discussão

Fazendo uma leitura prévia do artigo “On Linear Transformations”, foi observado que o início da ideia estava no artigo anterior a este, denominado “On The Theory of Linear Transformations”. Desta forma, a concentração de esforços foi fixada neste ultimo artigo que foi o foco da pesquisa. Para entender o contexto do assunto, houve a necessidade da leitura e interpretação do que seriam os invariantes e para tal fim foi lido parcialmente o livro: “An Introduction to the Algebra of Quantics” by ELLIOT.

Durante os estudos, Cayley já mencionava que a teoria funcionava parcialmente para alguns casos particulares que foram demonstrados no artigo com exemplos de formas consagradas como o teorema de Gauss sobre a função quadrática escrita em “Disquistiones Arithmaticae”:

U = Ax2 + By2 + Cz2 + 2Fzy + 2Gxz + 2Hxy

que é estudada por Cayley.

Os resultados do estudo da teoria descrita por Cayley encontram-se anexos.

5. Considerações Finais

A pesquisa conseguiu abranger aspectos históricos da matemática, as relações entre os diversos matemáticos e suas teorias do século XIX, que são utilizadas hoje em dia em problemas no campo da física quântica. Mostrando que os estudos da época em questão não foram apenas devaneios sem utilidade específica e que são de importância para fundamentar outras disciplinas.
Além do aspecto histórico de Cayley no mundo matemático e suas implicações, foram discutidos os assuntos relacionados a Teoria dos Invariantes, o qual Cayley, assim como Sylvester, são mais reconhecidos na história. O objeto de estudo, que foi a primeira publicação de Cayley sobre invariantes, requereu o estudo do início de álgebra abstrata, a qual estava nascendo na época.
Desta forma, houve questionamentos e pesquisas para que os mecanismos matemáticos usados nas teorias fossem desvendados. Algumas das perguntas ficaram sem respostas, principalmente passagens matemáticas que não são usadas como na matemática atual, assim como jargões que na época eram de conhecimento comum.
Sob o ponto de vista acadêmico, licenciatura em matemática, a presente iniciação foi de grande proveito para assimilar o desenvolvimento do pensamento matemático na descoberta de novas teorias e seu desenvolvimento, assim como a conexão destas com o mundo físico.

Referências Bibliográficas

- ELLIOT, E. B. An Introduction to the Algebra of Quantics, Oxford: At the Claredon Press, 1895.

- CAYLEY, A., On The Theory of Linear Transformations, Cambridge Mathematical Journal, vol. IV. February, 1845, Nº XXIII, pg 193-209.

- PARSHALL, K. H., ROWE, D. E., The Emergence of the American Mathematical Research Community, 1876-1900: J.J. Sylvester, Felix Klein, and E. H. Moore. American Mathematical Society, London Mathematical Society, 1997, USA, pg 66-70.

- KATZ, V. J., A History of Mathematics: An Introduction, 2nd ed., Addison-Wesley Education Publishers, 1998, USA, pg 672-697

- BOYER, C. B., História da Matemática, tradução: Gomide, E. F., Edgard Blücher, 1974, pg 419–437.

- C. J. CLAY, M.A. AND SONS, The Collected Mathematical Papers Of Arthur Cayley, Sc.D., F.E.S., Sadlekian Professor Of Pure

Mathematics in the Univesity of Cambridge, Cambridge At The University Press, 1889

- O´Connor,J.J., Robertson,E.F., Arthur Cayley,
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Cayley.html acessado em 08/05/2010
Anexos

---

e recursivamente tem-se: $\dddot{u} = N^{p}.\ddot{u} = L^{p}M^{p}N^{p}.u$

também denotado de: $u' = L^{p}M^{p}N^{p}...u$

Esta é a forma com que Cayley mostra que a relação da função u está conectada com a nova função u' através de seus coeficientes que sofrem transformações lineares em $L^{p}M^{p}N^{p}...$

A partir deste ponto, Cayley praticamente aplica a mesma idéia para a função a seguir:

$$\sum\sum\sum...(rst...x_r y_s z_t...)$$

onde $\Sigma's$ refere sucessivamente a $r, s, t,...,$ e são somatórios de **1** até **m** inclusive. Além disso, se u está travado como um derivativo escreve-se:

$$u = \Theta.\sum\sum\sum...(rst...x_r y_s z_t...)$$

assumindo

$$\left.\begin{array}{l} x_r = \lambda_r^1 \dot{x}_1 + \lambda_r^2 \dot{x}_2 ... + \lambda_r^m \dot{x}_m \\ y_r = \mu_r^1 \dot{y}_1 + \mu_r^2 \dot{y}_2 ... + \mu_r^m \dot{y}_m \\ \vdots \\ \\ \end{array}\right\}$$

obtendo

$$\sum\sum\sum...(rst...x_r y_s z_t...) = \sum\sum\sum...\left(\dot{r}st...\dot{x}_r\, y_s z_t...\right)... =$$
$$= \sum\sum\sum...\left(\dot{r}\dot{s}\dot{t}...\dot{x}_r\, \dot{y}_s\, \dot{z}_t...\right)...$$

e a fórmula para (u) torna-se

$$\Theta\sum\sum\sum...\left(\dot{r}\dot{s}\dot{t}...\dot{x}_r\, \dot{y}_s\, \dot{z}_t...\right)... = L^{p}M^{p}N^{p}...\Theta\sum\sum\sum...(rst...x_r y_s z_t...)$$

para obter a expressão dos coeficientes $\dot{r}\dot{s}\dot{t}...$ em termos de $rst...$, tem-se

$$\dot{r}\dot{s}\dot{t}... = \sum\sum\sum...\left(\lambda_f^r \mu_g^s \nu_h^t ...fgh...\right)$$

onde $\Sigma's$ refere sucessivamente a $f, g, h,...,$ e são somatórios de **1** até **m** inclusive.

Omitindo as marcas de variação ('), e também os sinais de somatórios (Σ) e os fatores correspondentes de L, M, N,... a equação $u' = L^{p}M^{p}N^{p}...u$ satisfaz (é semelhante) a $\dot{r}\dot{s}\dot{t}... = \sum\sum\sum...\left(\lambda_f^r \mu_g^s \nu_h^t ...fgh...\right)$.

Dessa maneira, mostra-se a relação da função u com a teoria de transformações de funções.

Assim como foi feita a analogia para somatórios, Cayley repetiu o processo

$$\sum\sum\cdots\left(r\alpha t\ldots\frac{d}{dr\beta t\ldots}\right)u=0$$

, *ou* pu,

conforme α não é igual, ou igual, para β, e assim por diante, os sinais de somatória referem-se em todos os casos aos da série $r, s, t, \ldots$, que são deixados variáveis, e vão de 1 até m inclusive. Considerando a forma geral de u, como dado pela equação (A). Esta é composta por uma série de termos, cada um da forma:

$cPQR\ldots$ (*p fatores*),

em que

$$P=\begin{vmatrix} 1s^{\cdot}t^{\cdot} & \ldots, & 1s^{\cdot\cdot}t^{\cdot\cdot} & \ldots, & \ldots(m\_termos) \\ \vdots & & & & \\ \alpha s^{\cdot}t^{\cdot} & \ldots, & \alpha s^{\cdot\cdot}t^{\cdot\cdot} & \ldots, & \\ \vdots & & & & \\ \beta s^{\cdot}t^{\cdot} & \ldots, & \beta s^{\cdot\cdot}t^{\cdot\cdot} & \ldots, & \\ \vdots & & & & \end{vmatrix}$$

$Q, R, \&c.$ sendo da mesma forma, tem-se

$$\sum\sum\ldots\left(\alpha st\ldots\frac{d}{d\beta st\ldots}\right)u=cQR\ldots\sum\sum\ldots\left(\alpha st\ldots\frac{d}{d\beta st\ldots}\right)P+\&c.+\&c.,$$

e

$$\sum\sum\ldots\left(\alpha st\ldots\frac{d}{d\beta st\ldots}\right)P=\begin{vmatrix} 1s^{\cdot}t^{\cdot} & \ldots, & 1s^{\cdot\cdot}t^{\cdot\cdot} & \ldots, & \ldots(m\_termos) \\ \vdots & & & & \\ \alpha s^{\cdot}t^{\cdot} & \ldots, & \alpha s^{\cdot\cdot}t^{\cdot\cdot} & \ldots, & \\ \vdots & & & & \\ \beta s^{\cdot}t^{\cdot} & \ldots, & \beta s^{\cdot\cdot}t^{\cdot\cdot} & \ldots, & \\ \vdots & & & & \end{vmatrix}=0;$$

com isto, os termos do outro lado da equação desaparecem por serem iguais a 0. Se, no entanto, α igual β,

$$\sum\sum\ldots\left(\alpha st\ldots\frac{d}{d\beta st\ldots}\right)P=P;$$

onde, do segundo lado, tem-se

$cQR\ldots P + cPR\ldots Q + \&c. = p.cPQR\ldots + \&c. + \&c. = pU$

desta forma Cayley concluiu que o sistema de Boole pode ser obtido através das transformações lineares que se seguiram.

Porém, algumas observações foram feitas sobre a obtenção da expressão geral de um Hiperdeterminante, que são:

os únicos casos podem ser feitos

I. p=1, n par, (se n for impar, aí existem somente Hiperdeterminants incompletos).

II. p=2, m=2, n par.

III. p=3, m=2, n=4.

O tratamento dos chamados Hiperdeterminantes baseia-se nas operações de determinantes da época descritos a seguir:
Empregando a notação da época temos:

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta & \gamma \dots \\ \alpha', & \beta' & \gamma' \dots \\ \alpha'', & \beta'' & \gamma'' \dots \\ \vdots & & \end{vmatrix}$$

Que denotam a series de determinantes
Já para a multiplicação de matrizes usa-se

$$\begin{Vmatrix} A, & B & C & D & \dots \\ A', & B', & C', & D' & \dots \\ A'', & B'', & C'', & D'' & \dots \end{Vmatrix} = E \begin{Vmatrix} \alpha, & \beta & \gamma & \delta & \dots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \delta' & \dots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \delta'' & \dots \end{Vmatrix} \quad \dots\dots(2)$$

Sendo

$$\left.\begin{array}{l} A = \lambda\alpha + \lambda'\alpha' + \lambda''\alpha'' + \dots \\ B = \lambda\beta + \lambda'\beta' + \lambda''\beta'' + \dots \\ \vdots \\ A' = \mu\alpha + \mu'\alpha' + \mu''\alpha'' + \dots \\ B' = \mu\beta + \mu'\beta' + \mu''\beta'' + \dots \\ \vdots \\ \& c. \end{array}\right\}$$

$$E = \begin{vmatrix} \lambda, \mu \dots \\ \lambda', \mu' \dots \\ \vdots \end{vmatrix}$$

Nota-se neste ponto que a multiplicação da época é feita coluna x coluna, e não como atualmente em que o processo é de linha x coluna.

A próxima etapa é a de colocar coeficientes arbitrários, porém ordenados seguindo o critério a seguir:

$rst\dots$

em que o numero de letras simbólicas $r, s, \dots$ é n (n representa o número de variáveis do sistema), e cada um destes pode assumir os valores inteiros de **1** a **m** (estes representarão o grau da função) inclusive.
Assim, representando todas as séries, em qualquer ordem, em que α é fixada numa posição e depois em outra, como no exemplo:

$$\alpha s_{,}' t_{,}' \;, \dots, \quad \alpha s_{,}'' t_{,}'' \quad \dots,$$
$$r_{,,}' \alpha t_{,,}' \;, \dots, \quad r_{,,}'' \alpha t_{,,}'' \quad \dots,$$

dessa forma chegasse na função μ dos coeficientes