18º Congresso de Iniciação Científica

ARTIGO DE GEORGE BOOLE: O INICIO DA TEORIA DOS INVARIANTES PARTE II

Autor(es)

LUÍS RICARDO ALVES SOARES

Orientador(es)

SAMUEL TANAAMI, ADRIANA CÉSAR DE MATTOS

Apoio Financeiro

FAPIC/UNIMEP

1. Introdução

Esse projeto de iniciação científica faz parte de uma pesquisa maior denominada "A análise do processo de reconhecimento na História da Matemática", sob responsabilidade da Profa. Dra. Adriana César de Mattos (UNESP - Rio Claro), que tem como objetivo responder sobre a emergência de Arthur Cayley na História da Matemática fixando dois aspectos: as estruturas de reconhecimento e o epistemológico.

A Teoria dos Invariantes foi desenvolvida por Arthur Cayley e Joseph Sylvester principalmente entre 1840 e 1850 na Inglaterra (Crilly, 1986).

Segundo Crilly (1986) e Parshall (2006, 1996), o artigo de George Boole, publicado em 1841, intitulado "Exposition of a General Theory of Linear Transformations", foi a motivação para Cayley e Sylvester.

" … had an even greater motivation to concentrate anew of these topics, given that Cayley – taking his mathematical lead from George Boole – had done and was doing related work in the so-called theory of forms, and given that Sylvester's earlier work had clear and direct applications to that involving theory" (PARSHALL, 1998,p.23).

George Boole (1815-1864) influenciou o jovem Cayley. Este publicou dois artigos sobre o tema, um em 1845 e o outro em 1846 "…which have been regarded by generations of mathematicians as laying the foundations of the subject" (Crilly, 1986, p. 242).

De acordo com Crilly (1986), em 1850 Cayley trabalhou nas "...series of memoir on quantics" (p.242). Ele se voltou para o desenvolvimento dos invariantes das equações diferenciais parciais. Uma das razões foi "…to calculate linearly independent and irreducible invariants and display them in tabular form" (Crilly, 1986, p.242).

De acordo com Parshall (2006), James Joseph Sylvester e Arthur Cayley, especialmente durante o período de 1850 a 1856, construíram a base da "British theory of invariants". De fato, eles "…put the Britain on the international map algebraically" (p.186) (…) "… the area of algebraic research that dominated the British mathematical scene was invariant theory"(p.188).

Se Sylvester e Cayley foram inspirados por Boole (1841), então cabe estudar o artigo que Boole (1841) escreveu para se ter clareza do início de uma das teorias mais importantes do cenário europeu do século XIX.

2. Objetivos

Este projeto tem como objetivo o estudo da PARTE TEÓRICA do artigo de George Boole (1841) “Exposition of general Theory of Linear Transformations”, Parte II.

3. Desenvolvimento

A pesquisa, de natureza bibliográfica, desenvolveu-se a partir da análise do artigo de George Boole “Exposition of a General Theory of Linear Transformations” – Parte II, publicado em 1841, e de textos auxiliares, tais como os artigos de Crilly (1986), Parshall (2006,1998) e Elliott (1895) bem como do livro “Geometria Analítica: um tratamento vetorial” (BOULOS e CAMARGO, 2004). Para isso, reuniões semanais foram realizadas, além de estudos individuais.

4. Resultado e Discussão

George Boole estendeu suas investigações em relação à Parte I de seu artigo “Exposition of a general Theory of Linear Transformations” (1841) e chamou essa extensão de Parte II.

Representaremos o sistema binário de equações, , sob as formas **(ver ANEXO I_A)** sendo a_1, b_1, A_1, B_1 constantes independentes, suscetíveis, cada uma, a valores diferentes para cada termo sucessivo da função a que pertence, k é uma constante numérica determinada pela fórmula **(ver ANEXO I_B)**, e ?, ?, ..., ? inteiros positivos indeterminados (incluindo 0), sujeitos à condição de homogeneidade,

? + ? + ... + µ = n.

As relações entre as constantes de (1) e (2) provenientes das condições de dependência de ?(Q + hq) = 0, ?(R + hr) = 0, podem ser expressas sob a forma simbólica **(ver ANEXO I_C)**, com os valores de ? variando de 1 a ?, grau de ?(Q).

Os resultados acima podem generalizados. Suponha que temos ? + 1 equações, expressas nas formas gerais **(ver ANEXO I_D)**, então são as equações

?(Q + h_1q_1 + h_2q_2 + ... + $h_?q_?$) = 0, ?(R + h_1r_1 + h_2r_2 + ... + $h_?r_?$) = 0 (5)

idênticas referente a h_1, h_2, ..., $h_?$; e se colocarmos **(ver ANEXO I_E)**, então estão todas as relações entre as constantes de (4) incluídas no teorema **(ver ANEXO I_F)**, a, b, ..., r, sendo inteiros positivos indeterminados, incluindo 0, sujeitos apenas à condição de que sua soma não exceda ?. No lugar de (6), generalizando, podemos afirmar **(ver ANEXO I_G)**, F denotando qualquer combinação racional e interpretável dos símbolos para os quais é fixada.

Tomemos o sistema ternário de equações **(ver ANEXO I_H)**; a primeira das quais, q=r, colocamos no lugar de Q=R, de (4), então **(ver ANEXO II_A)**

Como são de terceiro grau, é evidente que todas as formas deduzidas de (6) serão incluídas nas seguintes nove equações **(ver ANEXO II_B)**.

Das equações acima, a quinta, (9), será desenvolvida envolvendo em seus numeradores os coeficientes de todas as equações do sistema original. Por isso, distingue-se das oito restantes, que serão obtidas aplicando-se o Teorema para Sistema Binários para separar pares de equações que podem ser selecionadas de (8). O desenvolvimento de (9) fornece **(ver ANEXO II_C)**, onde ?, aplicado a todos os termos particularmente, denota a soma de todas as combinações semelhantes, que são de primeiro grau com relação aos coeficientes de cada equação primitiva; assim **(ver ANEXO II_D)**,as outras oito equações podem ser deduzidas da Parte I (equação 56).

Quando o sistema (4) é linear, o teorema (6) deixa de ser interpretável, e é substituído pelo que se segue. Sejam em termos de outro conjunto de variáveis **(ver ANEXO II_E)**, e seja E aquela função de constantes obtida através da eliminação das variáveis do segundo membro das equações acima, expressas em suas formas mais gerais e igualadas a 0. Sejam E_1 uma função similar de constantes relativas ao primeiro membro de qualquer m equações do sistema original (4), e E_2 uma função de constantes do segundo membro da mesma equação, então

$EE_1 = E_2$ (11)

de modo que todas as relações podem ser encontradas.

Até agora a suposição era de que as equações do sistema proposto todas possuem mesmo grau. Quando não for o caso, deve-se recorrer a um dos métodos:

1) Podemos aumentar o grau, elevando a potência de cada equação primitiva com o grau indicado pelo mínimo múltiplo comum dos índices de seus graus, e então aplicar os teoremas das seções anteriores.

2) O segundo método depende da aplicação do princípio que será demonstrado, um princípio de aplicações que não estão restritas a funções homogêneas.

Seja U, uma função de x_1, x_2, ..., x_m, linearmente transformada em V, uma função de y_1, y_2, ..., y_m, em virtude das relações (10). Diferenciando, temos **(ver ANEXO III$_A$)**.

Uma vez que x_1, x_2, ..., x_m, são independentes, dx_1, dx_2, ..., dx_m são também independentes. As únicas relações em que os dxis entram são as de (12), uma vez que são linearmente relacionadas com dy_1, dy_2, ..., dy_m, da mesma forma que x_1, x_2, ..., x_m, são relacionadas com y_1, y_2, ..., y_m. É evidente, portanto, que os segundos membros de (13), (14), (15), podem ser considerados como formados a partir de seus respectivos primeiros membros, pela substituição dos valores de dx_1, dx_2, ..., dx_m, dados em (12). Além disso, os coeficientes dU/dx_1, dU/dx_2, etc. embora variáveis, sendo funções de x_1, x_2, ..., x_m, são, no entanto, constantes em relação a dx_1, dx_2, ..., dx_m. Por isso, é claro que (13), (14), (15), respeitam a homogeneidade com relação às diferenciais, estabelecendo entre seus coeficientes as mesmas relações, e estão sujeitas as mesmas leis gerais, como se esses coeficientes fossem absolutamente constantes.

Pela aplicação deste princípio, pode ser mostrado que a discussão de um sistema múltiplo de equações pode ser reduzido ao de um outro sistema, cujo índice comum deve ser igual a maior medida comum dos índices das equações originais, ou para qualquer múltiplo daquela quantidade.

Dado o sistema binário,

$ax + by = a'x' + b'y'$ (16),
$q = r$ (17)

o último sendo equação homogênea e de grau n.

Por diferenciação **(ver ANEXO III$_B$)**, essas relações, sendo lineares em relação à dx, dy, dx', dy', temos por (11) **(ver ANEXO III$_C$)**, que pode ser escrita na forma **(ver ANEXO III$_D$)**, e daria, se aplicarmos a diferenciação, uma equação homogênea de grau (n-1). Representaremos por q' = r'. Aplicando novamente o teorema (11), obtemos **(ver ANEXO III$_E$)**, e assim, finalmente, depois de ? repetições do processo **(ver ANEXO III$_F$)**. Falta determinar E. Pela equação 87 da Parte 1 **(ver ANEXO III$_G$)**, quando m = 2, é fácil ver que ? = 2(n – 1). E uma vez que as relações entre as variáveis são as mesmas entre os diferencias, é evidente que o valor de E, determinado a partir de (20), pode ser aplicado no presente caso. Substituindo esses valores em (19), obtemos **(ver ANEXO III$_H$)**. Dando a ? os valores 1, 2, 3, ..., n, obteremos uma série de equações homogêneas, das quais as n primeiras mais a equação (16) determinam um sistema linear e a última fornece uma relação entre as constantes. As relações restantes podem ser deduzidas de várias formas, da equação restante do sistema acima.

Ao término do seu artigo Boole cita que as transformações lineares foram até então aplicadas com a finalidade de retirar de uma função homogênea os termos que envolvem os produtos mistos das variáveis envolvidas. E nessa linha de raciocínio uma aplicação dessa ideia foi encontrada durante esta pesquisa na geometria analítica. Através da translação do plano cartesiano podemos retirar de uma função homogênea os seus termos lineares. Por meio da rotação, segundo um ângulo ?, do mesmo plano, podemos remover os termos que envolvem os produtos mistos da nova função, obtendo uma expressão que contenha apenas os termos quadráticos das variáveis e o termo independente.

5. Considerações Finais

Tendo feito o estudo da Parte II do artigo de George Boole "Exposition of a General Theory of Linear Transformations", publicado em 1841, concluímos que este foi o início da Teoria dos Invariantes que emergiu na Inglaterra no século XIX. Verificamos ainda uma aplicação desta teoria na geométrica analítica.

Referências Bibliográficas

BALL, W.W. R. A short Account of the History of Mathematics. Second edition. London: Macmillian an CO., Limited: 1893.

BOOLE, G., 1841, "Exposition of a general theory of linear transformations", The Cambridge Mathematical Journal. vol.III, November, Part. I.

BOOLE, G., 1841, "Exposition of a general theory of linear transformations", The Cambridge Mathematical Journal. vol.III, November, Part. II.

BOYER, C.B. História da Matemática. Edgard Blücher. São Paulo. 1974.

CAJORI, F. A History of Mathematics. Macmillan & Co.: New York & London, 1938.

CRILLY, T. Arthur Cayley Mathematician Laureate of the Victorian Age. Baltimore, The John Hopkins University Press, 2004.

_______ The Rise of cayley's Invariant Theory (1841-1862). Historia Mathematica. V.13, 1986, p. 241-254.

_______The young Arthur Cayley. Notes and Records of the Royal Society. London, v.52 (2), 1998, pp.267-282.

CAYLEY, A. An Introductory memoir on quantics. Philosophical Transaction of Royal Society of London. London, 1854b, 144, pp. 244-258.

ELLIOT, E. B. An Introduction to the Algebra of Quantics, Oxford: At the Claredon Press, 1895.

MATTOS,A.C. The process of recognition in the History of Mathematics. Report. London South Bank University, 2006.

Parshall, K. H., The British development of the theory of invariants (1841-1895). BSHM Bulletin. 2006, 21, 186-199.

Parshall, K. H., James Joseph Sylvester: Life and Work in letters. Oxford, Clarendon Press: 1998.

CAMARGO I, BOULOS P. Geometria Analítica: um tratamento vetorial. Prentice Hall. 3ª. Ed. São Paulo. 2005.

OLIVA, W. M. Vetores e Geometria. Edgard Blücher. São Paulo. 1971.

GARBI, G. G. O Romance das Equações Algébricas. Livraria da Física. 2ª. Ed. São Paulo. 2007.

Anexos

ANEXO III$_A$

$$\begin{cases} dx_1 = \lambda_1\, dy_1 + \lambda_2\, dy_2 + \cdots \lambda_m\, dy_m \\ dx_2 = \mu_1\, dy_1 + \mu_2\, dy_2 + \cdots \mu_m\, dy_m \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ dx_m = \rho_1\, dy_1 + \rho_2\, dy_2 + \cdots \rho_m\, dy_m \end{cases} \qquad (12),$$

$$\frac{dU}{dx_1}dx_1 + \frac{dU}{dx_2}dx_2 + \cdots + \frac{dU}{dx_m}dx_m = \frac{dV}{dy_1}dy_1 + \frac{dV}{dy_2}dy_2 + \cdots + \frac{dV}{dy_m}dy_m \qquad (13),$$

$$\frac{d^2U}{dx_1^{\,2}}dx_1^{\,2} + 2\frac{d^2U}{dx_1\,dx_2}dx_1\,dx_2 + \text{etc} = \frac{d^2V}{dy_1^{\,2}}dy_1^{\,2} + 2\frac{d^2V}{dy_1\,dy_2}dy_1\,dy_2 + \text{etc} \quad (14),$$

$$\sum K \frac{d^{\eta}U}{dx_1^a dx_2^b \ldots dx_m^{\,c}}\, dx_1^a dx_2^b \ldots dx_m^{\,c} = \sum K \frac{d^{\eta}V}{dy_1^a dy_2^b \ldots dy_m^{\,c}}\, dy_1^a dy_2^b \ldots dy_m^{\,c} \qquad (15)$$

ANEXO III$_B$

$$\begin{cases} ax + by = a'x' + b'y' \\ \dfrac{dq}{dx}dx + \dfrac{dq}{dy}dy = \dfrac{dq}{dx'}dx' + \dfrac{dq}{dy'}dy' \end{cases} \qquad (18);$$

ANEXO III$_C$

$$E\left(a\frac{dq}{dy} - b\frac{dq}{dx}\right) = a'\frac{dr}{dy'} - b'\frac{dr}{dx'},$$

ANEXO III$_D$

$$E\left(a\frac{d}{dy} - b\frac{d}{dx}\right)q = \left(a'\frac{d}{dy'} - b'\frac{d}{dx'}\right)r,$$

ANEXO III$_E$

$$E\left(a\frac{d}{dy} - b\frac{d}{dx}\right)q' = \left(a'\frac{d}{dy'} - b'\frac{d}{dx'}\right)r',$$

ANEXO III$_F$

$$E^{\eta}\left(a\frac{d}{dy} - b\frac{d}{dx}\right)^{\eta} q = \left(a'\frac{d}{dy'} - b'\frac{d}{dx'}\right)^{\eta} r \qquad (19).$$

ANEXO III$_G$

$$\theta(q) = \frac{\theta(r)}{E^{\frac{\gamma n}{m}}} = \frac{\theta(r)}{E^{n(n-1)}} \qquad (20),$$

ANEXO III$_H$

$$\frac{\left(a\dfrac{d}{dy} - b\dfrac{d}{dx}\right)^{\eta}}{\{\theta(q)\}^{\frac{\eta}{n(n-1)}}}q = \frac{\left(a'\dfrac{d}{dy'} - b'\dfrac{d}{dx'}\right)^{\eta}}{\{\theta(r)\}^{\frac{\eta}{n(n-1)}}}r \qquad (21).$$

ANEXO I$_A$

$$\sum k a_1 x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \cdots x_m^{\mu} = \sum k b_1 y_1^{\alpha} y_2^{\beta} \cdots y_m^{\mu} \qquad (1),$$

$$\sum k A_1 x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \cdots x_m^{\mu} = \sum k B_1 y_1^{\alpha} y_2^{\beta} \cdots y_m^{\mu} \qquad (2),$$

ANEXO I$_B$

$$k = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \alpha \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \beta \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \mu},$$

ANEXO I$_C$

$$\frac{\left(\sum a_1 \frac{d}{dA_1}\right)^n \theta(Q)}{\theta(Q)} = \frac{\left(\sum b_1 \frac{d}{dB_1}\right)^n \theta(R)}{\theta(R)} \qquad (3).$$

ANEXO I$_D$

$$\left\{\begin{array}{l} \sum k a_1 x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \cdots x_m^{\mu} = \sum k b_1 y_1^{\alpha} y_2^{\beta} \cdots y_m^{\mu} \;\; \text{para } q_1 = r_1 \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \sum k a_{\rho} x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \cdots x_m^{\mu} = \sum k b_{\rho} y_1^{\alpha} y_2^{\beta} \cdots y_m^{\mu} \;\; \text{para } q_{\rho} = r_{\rho} \\ \sum k A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \cdots x_m^{\mu} = \sum k B_1 y_1^{\alpha} y_2^{\beta} \cdots y_m^{\mu} \;\; \text{para } Q = R \end{array}\right. \qquad (4)$$

ANEXO I$_E$

$$\sum\left(a_1 \frac{d}{dA}\right) = \phi_1, \quad \sum\left(b_1 \frac{d}{dB}\right) = \psi_1,$$

$$\sum\left(a_{\rho} \frac{d}{dA}\right) = \phi_{\rho}, \quad \sum\left(b_{\rho} \frac{d}{dB}\right) = \psi_{\rho};$$

ANEXO I$_F$

$$\frac{\phi_1^{a} \phi_2^{b} \cdots \phi_{\rho}^{r} \theta(Q)}{\theta(Q)} = \frac{\psi_1^{a} \psi_2^{b} \cdots \psi_{\rho}^{r} \theta(R)}{\theta(R)} \qquad (6)$$

ANEXO I$_G$

$$\frac{F(\phi_1 \phi_2 \cdots \phi_{\rho})\theta(Q)}{\theta(Q)} = \frac{F(\psi_1 \psi_2 \cdots \psi_{\rho})\theta(R)}{\theta(R)} \qquad (7)$$

ANEXO I$_H$

$$\left\{\begin{array}{r} a x^2 + b y^2 + c z^2 + 2 d y z + 2 e x z + 2 f x y = a' x'^2 + \text{etc.} \\ a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 z^2 + 2 d_1 y z + 2 e_1 x z + 2 f_1 x y = a'_1 x'^2 + \text{etc.} \\ a_2 x^2 + b_2 y^2 + c_2 z^2 + 2 d_2 y z + 2 e_2 x z + 2 f_2 x y = a'_2 x'^2 + \text{etc.} \end{array}\right. \qquad (8);$$

ANEXO II$_A$

$$\phi_1 = a_1 \frac{d}{da} + b_1 \frac{d}{db} + \cdots + f_1 \frac{d}{df} \quad \psi_1 = a'_1 \frac{d}{da'} + \text{etc.}$$

$$\phi_2 = a_2 \frac{d}{da} + b_2 \frac{d}{db} + \cdots + f_2 \frac{d}{df} \quad \psi_2 = a'_2 \frac{d}{da'} + \text{etc.}$$

$$\theta(q) = abc + 2def - \left(ad^2 + be^2 + cf^2\right) \quad \theta(r) = a'b'c' + \text{etc.}$$

ANEXO II$_B$

$$\frac{\phi_1 \theta(q)}{\theta(q)} = \frac{\psi_1 \theta(r)}{\theta(r)}, \quad \frac{\phi_2 \theta(q)}{\theta(q)} = \frac{\psi_2 \theta(r)}{\theta(r)},$$

$$\frac{\phi_1{}^2 \theta(q)}{\theta(q)} = \frac{\psi_1{}^2 \theta(r)}{\theta(r)}, \quad \frac{\phi_2{}^2 \theta(q)}{\theta(q)} = \frac{\psi_2{}^2 \theta(r)}{\theta(r)},$$

$$\frac{\phi_1 \phi_2 \theta(q)}{\theta(q)} = \frac{\psi_1 \psi_2 \theta(r)}{\theta(r)} \qquad (9),$$

$$\frac{\phi_1{}^2 \phi_2 \theta(q)}{\theta(q)} = \frac{\psi_1{}^2 \psi_2 \theta(r)}{\theta(r)}, \quad \frac{\phi_1 \phi_2{}^2 \theta(q)}{\theta(q)} = \frac{\psi_1 \psi_2{}^2 \theta(r)}{\theta(r)},$$

$$\frac{\phi_1{}^3 \theta(q)}{\theta(q)} = \frac{\psi_1{}^3 \theta(r)}{\theta(r)}, \quad \frac{\phi_2{}^3 \theta(q)}{\theta(q)} = \frac{\psi_2{}^3 \theta(r)}{\theta(r)}.$$

ANEXO II$_C$

$$\frac{\sum\left(abc + 2def - \left(ad^2 + be^2 + cf^2\right)\right)}{abc + 2def - \left(ad^2 + be^2 + cf^2\right)} = \frac{\sum(a'b'c' + \text{etc})}{abc + \text{etc}},$$

ANEXO II$_D$

$$\sum abc = ab_1c_2 + ab_2c_1 + a_1bc_2 + a_1b_2c + a_2bc_1 + a_2b_1c,$$

ANEXO II$_E$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots \lambda_m y_m \\ x_2 = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \cdots \mu_m y_m \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_m = \rho_1 y_1 + \rho_2 y_2 + \cdots \rho_m y_m \end{array}\right. \qquad (10);$$