Tema:
CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO:
A universidade e a construção do futuro

17º Congresso de Iniciação Científica

FORMA QUADRÁTICA: O MÉTODO DE CALCULAR OS SEUS INVARIANTES

Autor(es)

GISELE ZANUZI HEBFNER

Orientador(es)

ADRIANA CÉSAR DE MATTOS

Apoio Financeiro

FAPIC/UNIMEP

1. Introdução

A Teoria dos Invariantes focaliza no estudo das propriedades intrínsecas dos polinômios, propriedades que não são afetadas por uma mudança de variáveis. O objetivo é transformar uma forma em outra, obviamente em uma mais simples, por exemplo via uma mudança de coordenadas.
Uma função nas variáveis x, y, z... que é racional integral e homogênea nessas variáveis, é chamado um quântico em x,y,z.. Os coeficientes de um quântico são constantes até onde x,y,z. chegarem.
Se há duas variáveis x e y o quântico é chamado de quântico binário; Se há três variáveis o quântico é chamado ternário, e assim, sucessivamente, poderíamos ter um quântico quaternário e assim por diante. Se houver q variáveis, nós podemos chamar isto de q-ary quântico.
Quânticos de primeira, segunda, terceira, quarta,..., pth ordens são chamados de linear, quadráticas, cúbicas, quarternárias,..., p-ics. Por exemplo $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ é uma forma cúbica binária e $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$ é uma forma quadrática. Pretendemos usar o método apresentado por George Boole (1841) para encontrar seus invariantes.

2. Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal utilizar o método de Boole (1841) para calcular os invariantes da forma binária quadrática.

3. Desenvolvimento

Estudamos o artigo de George Boole “Exposition of a General Theory of Linear Transformations”, publicado em 1845, e de textos auxiliares, tais como os artigos de Crilly (1986), Parshall (2006,1998) e Elliott (1895). Semanalmente, ocorreu a participação da

bolsista nos seminários sobre a Álgebra do século XIX, que aconteciam sob a orientação da professora Adriana César de Mattos, na UNIMEP.
Nos seminários também havia a participação da aluna Kelly Cristina Trinca Marchesi, a qual desenvolveu um trabalho baseado no mesmo artigo de Boole, assim estudamos e desenvolvemos juntas parte do trabalho, como por exemplo a tradução do artigo.
Durante o desenvolvimento, a principal dificuldade encontrada foi com a língua inglesa predominante em todos os artigos estudados, mas a orientadora ajudou muito com as traduções e exemplificações. Também pode-se dizer, que o entendimento da álgebra abstrata, da notação do século XIX e a história da matemática deste século passado, são assuntos que trazem dificuldades para o entendimento.
O trabalho realizou-se com o estudo do artigo para aplicar o método proposto por Boole (1841) na binária quadrática.

4. Resultado e Discussão

Fazendo o estudo da forma quadrática, vimos que as formas homogêneas podem ser substituídas pelas variáveis x_1, x_2, como também pelas variáveis y_1, y_2, conectadas com as originais; no presente caso, formas homogêneas de grau 2, por meio da relação: $x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2$ (1), ou seja, conseguimos determinar em (1) os valores dos coeficientes A_1, A_2, em Q, $Q=A_1 y_1^2+A_2 y_2^2$ (2).
As equações (1) e (2) são casos particulares de um sistema homogêneo, $h_2 (x_1,x_2)=h'_2 (y_1,y_2)$ (3) e $H_2 (X_1,X_2)=H'_2 (Y_1,Y_2)$ (4) ,sendo h_2, h'_2, H_2, H'_2, formas homogêneas de grau 2.
De um modo geral podemos encontrar para grau n outras equaçõs (5) e (6), e a partir destas podemos dizer que q=r (7) e Q=R (8).
Assim as formas q, r, Q, R podem ser representadas como formas quadráticas, onde: $q= a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_1 x_2$, $r = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_1 y_2$, e consequentemente temos Q e R. Para determinar as relações entre os coeficientes, diferenciamos (8) com relação a y_1, y_2.
Vamos supor as relações lineares entre dois conjuntos de variáveis representadas da seguinte forma: $x_1= ?_1 y_1 + ?_2 y_2$, e $x_2= ?_1 y_1 + ?_2 y_2$. Define-se $Q = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_1 x_2$, assim substituindo os valores de x_1 e x_2 em Q, sabendo que Q=R e efetuando as seguintes partes: a) Calculando a derivada de Q em relação a x_1. b) Calculando a derivada de x_1 em relação a y_1. c) Calculando a derivada de Q em relação a x_2. d) Calculando a derivada de x_2 em relação a y_1. e) Repetindo as etapas anteriores em relação a y_2, chegaremos ao resultado esperado. (Ver Anexo 1).

Invariantes ?

Seja ? o operador sobre a forma homogênea de grau 2, de modo que ?(Q) seja um invariante relativo a esta forma.
Adotamos a notação comum Q para uma forma homogênea de grau 2:

$$Q = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

Calculando a diferencial em relação a x e depois a y, e dividindo por 2, temos:

$Ax + By = 0$ e
$Bx + Cy = 0$,

portanto ?(Q) é:

$$?(Q) = B^2 - AC, \text{ ou } AC - B^2 .$$

Para o Cálculo de um invariante ?(Q), basta fazer as devidas eliminações e cálculos como feitos no presente estudo. (Ver anexos 4 e 5)

5. Considerações Finais

Neste trabalho foi realizado o estudo da Parte I do artigo de George Boole “Exposition of a General Theory of Linear Transformations” publicado em 1845, na Inglaterra. Com base nesse artigo, verificamos como o autor realizou o cálculo de um invariante para n váriáveis, assim, a partir deste estudo, conseguimos transformar os cálculos de Boole, para a forma binária quadrática, por seu método de diferenciação até se chegar a um sistema de equações lineares que se referem a um determinante de coeficientes, ou seja, ?(Q).

Desta forma, encontramos o verdadeiro significado de um invariante, que deve satisfazer: $AC - B^2 = (lm´-ml´)^2 (ac-b^2)$, sendo $Q' = ax^2 + 2bxy + cy^2$ o polinômio homogêneo, a transformação linear $x = lX+mY$ e $y = l'X+m'Y$ e o polinômio transformado $Q = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$. $AC - B^2 = (lm´-ml´)^2 (ac-b^2)$, sendo $Q' = ax^2 + 2bxy + cy^2$ o polinômio homogêneo, a transformação linear $x = lX+mY$ e $y = l'X+m'Y$ e o polinômio transformado $Q = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$.

Referências Bibliográficas

BOOLE, G., 1841. Exposition of a general theory of linear transformations. The Cambridge Mathematical Journal. vol.III, November, Part. I.

CRILLY, T. Arthur Cayley Mathematician Laureate of the Victorian Age. Baltimore, The John Hopkins University Press, 2004.

_______ The Rise of cayley’s Invariant Theory (1841-1862). Historia Mathematica. V.13, 1986, p. 241-254.

_______The young Arthur Cayley. Notes and Records of the Royal Society. London, v.52 (2), 1998, pp.267-282.

CAYLEY, A. An Introductory memoir upon quantics. Philosophical Transaction of Royal Society of London. London, 1854b, 144, pp. 244-258.

Transaction of Royal Society of London. London, 1854b, 144, pp. 244-258.

ELLIOT, E. B. An Introduction to the Algebra of Quantics, Oxford: At the Claredon Press, 1895.

FISHER, S.C. The Death of a Mathematical theory : a Study in the Sociology of Knowledge. Archive for the History of Exact Sciences, 3, 1996.

PARSHALL, K. H., The British development of the theory of invariants (1841-1895). BSHM Bulletin. 2006, 21, 186-199.

PARSHALL, K. H., James Joseph Sylvester: Life and Work in letters. Oxford, Clarendon Press: 1998.

Anexos

$$\frac{dQ}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_2} = [2A_1(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + A_3(\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2)].\lambda_2$$

e

$$\frac{dQ}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_2} = [2A_2(\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) + A_3(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)].\mu_2$$

Portanto:

$$\frac{dQ}{dy_2} = \frac{dR}{dy_2} = \frac{dQ}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dQ}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_2}$$

Assim, temos que:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dzy + 2Exz + 2Fxy$$

Fazendo as devidas eliminações, temos:

$$\begin{cases} Ax + Fy + Ez \\ Fx + By + Dz \\ Ex + Dy + Cz \end{cases}$$

Portanto,

$$\theta(Q) = ABC + 2DEF - (AD^2 + BE^2 + CF^2)$$

Se Q é da forma:

$$Q = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3$$

Diferenciando em relação às respectivas variáveis, temos:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$$
$$Bx^2 + 2Cxy + Dy^2 = 0$$

eliminando x^2 e y^2, e dividindo os resultados por y e respectivamente, por x, obtemos as equações lineares:

$$\begin{cases} 2(B^2 - AC)x - (AD - BC)y = 0 \\ (AD - BC)x - 2(C^2 - BD)y = 0 \end{cases}$$

Conseqüentemente, $\theta(Q)$ é:

$$\theta(Q) = (AD - BC)^2 - 4(B^2 - AC)(C^2 - BD)$$

Ou seja, $\theta(Q)$ são invariantes das formas homogêneas apresentadas.