17º Congresso de Iniciação Científica

ARTIGO DE GEORGE BOOLE: O INÍCIO DA TEORIA DOS INVARIANTES

Autor(es)

KELLY CRISTINA TRINCA MARCHESI

Orientador(es)

ADRIANA CÉSAR DE MATTOS

Apoio Financeiro

FAPIC/UNIMEP

1. Introdução

Este artigo é parte de uma pesquisa maior denominada "A análise do processo de reconhecimento na História da Matemática" cujo objetivo é trabalhar sobre a tese: a estrutura que administra o 'conhecimento' é essencial ao próprio 'conhecimento' em particular o matemático. A História da Matemática é o método utilizado para a defesa da tese. Foi fixado um período, século XIX; um local, Inglaterra; um matemático, Arthur Cayley e uma teoria, Teoria dos Invariantes. Naturalmente, o projeto maior envolve diversos tipos de documentos, artigos relativos ao próprio tema, pareceres sobre estes artigos, normas de funcionamento de instituições científicas, artigos de historiadores da Matemática referentes ao período e assunto fixados entre outros.

No presente trabalho o objetivo foi o estudo do artigo *"Exposition of a General Theory of Linear Transformations"* publicado por George Boole em 1841. A razão de estudarmos este texto se deve ao fato de que vários historiadores da Matemática que trabalham sobre este tema afirmam ter sido esta publicação de Boole de 1841 o início da Teoria dos Invariantes.

A Teoria dos Invariantes na Inglaterra foi desenvolvida por Arthur Cayley e Joseph Sylvester principalmente entre 1840 e 1850 (Crilly, 1986).

Segundo Crilly (1986) e Parshall (2006, 1996) o artigo de George Boole publicado em 1841 intitulado *"Exposition of a General Theory of Linear Transformations"* foi a motivação para Cayley e Sylvester.

Fisher (1996) também assume que este artigo marca o início da Teoria dos Invariantes.

Boole (1841) iniciou seu trabalho defendendo que as transformações de formas homogêneas por substituições lineares tem sido um problema recorrente em análise. Na Mecânica Analítica de Lagrange (1736-1813) ocupa uma posição importante, possui papel considerável também no trabalho de Laplace (1749-1827), Jacobi (1804-1851) estendeu sua investigação para polinômios homogêneos de grau dois com várias variáveis. Cauchy (1789-1857) contribuiu para o campo bem como De Morgan (1806-1871).

De acordo com Parshall (2006) James Joseph Sylvester e Arthur Cayley, especialmente durante 1850 a 1856, construíram a base da *"British theory of invariants"*. De fato, eles *"…put the Britain on the international map algebraically" (p.186) (…) "… the area of algebraic research that dominated the British mathematical scene was invariant theory"* (p.188).

2. Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal estudar o artigo *“Exposition of a General Theory of Linear Transformations”* de George Boole, publicado em 1841.

3. Desenvolvimento

A pesquisa, de natureza bibliográfica, desenvolveu o estudo do artigo de George Boole *“Exposition of a General Theory of Linear Transformations”*, publicado em 1841, e de textos auxiliares, tais como os artigos de Crilly (1986), Parshall (1998, 2006) e Elliott (1895).
Para isso foram apresentados seminários semanais sobre a Álgebra do século XIX, organizados pela Professora Dra Adriana e realizados na UNIMEP, com a participação de alunos do curso de Matemática.

4. Resultado e Discussão

O artigo “Exposition of a General Theory of Linear Transformations”

No século XIX aqueles que trabalhavam com as formas homogêneas procuravam substituir as variáveis $x_1, x_2, ..., x_m$, a partir de formas homogêneas pelas variáveis $y_1, y_2, ..., y_m$, conectadas com as originais; no presente caso, formas homogêneas de grau 2, por meio da relação:

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_m^2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2 \qquad (1),$$

ou seja, determinar em (1) os valores dos coeficientes $A_1, A_2, ..., A_m$, em Q,

$$Q = A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + ... + A_m y_m^2 \qquad (2),$$

O método usualmente empregado tem sido substituir, no lugar das variáveis envolvidas em (2) uma série de variáveis envolvidas no membro oposto, de modo que igualando os coeficientes e eliminando as constantes desconhecidas por meio da adição de equações de condição similarmente obtida a partir de (1). É na realização desta eliminação que consiste a principal dificuldade do problema, uma dificuldade decorrente do próprio princípio do método de solução. Aliás a dificuldade torna-se muito maior quando o grau da forma é maior que 2.
Os resultados finais da eliminação podem ser conhecidos, pela combinação de quatro equações.
As equações (1) e (2) são evidentemente casos particulares de um sistema homogêneo,

$$h_2 (x_1, x_2, ..., x_m) = h'_2 (y_1, y_2, ..., y_m) \qquad (3)$$
$$H_2 (X_1, X_2, ..., X_m) = H'_2 (Y_1, Y_2, ..., Y_m) \qquad (4)$$

sendo h_2, h'_2, H_2, H'_2, formas homogêneas de grau 2, de modo mais geral,

$$h_n (x_1, x_2, ..., x_m) = h'_n (y_1, y_2, ..., y_m) \qquad (5)$$
$$H_n (X_1, X_2, ..., X_m) = H'_n (Y_1, Y_2, ..., Y_m) \qquad (6)$$

h_n, H_n, h'_n *e* H'_n indicando, de acordo com a notação adotada acima, formas homogêneas de grau n. O problema neste caso se refere principalmente à determinação de relações mútuas dos coeficientes em (5) e (6), sobre a hipótese de que os segundos membros daquelas equações formadas respectivamente a partir de seus primeiros, pelos mesmos sistemas de substituições lineares. Representamos abaixo as equações (5) e (6) de forma abreviada:

$$q = r \qquad (7)$$
$$Q = R \qquad (8)$$

Seja v o número de termos nas formas homogêneas de grau n com m variáveis, e *t* representa o índice na sucessão de cada das séries dos inteiros a partir de m+1, para v inclusive "no Somatório"; seja também *?, ?, ?, ..., ?* inteiros indefinidos, variando de 0 a n-1 inclusive, e entrando em cada combinação possível sujeita a condição de homogeneidade, ou seja:

$? + ? + ? + ... + ? = n$

Então as formas q, r, Q, R podem ser representadas como formas gerais

(9) ver anexo 01

Temos como objetivo, determinar as relações entre os coeficientes.
Diferenciando (8) com relação a $y_1, y_2, ..., y_m$, temos:

(10) ver anexo 01

Considerando as relações lineares entre dois conjuntos de variáveis temos:

(11) ver anexo 01

Aplicando (10) nas equações acima, temos:

(12) ver anexo 02

Supomos os coeficientes, $?_1, ?_2, ..., ?_m, ?_1, ?_2, ..., ?_m$, *etc*. nas formas lineares (11) assumindo valores finitos, desse modo temos em (12) as condições simultâneas:

(13) ver anexo 02

que implicam necessariamente em:

(14) ver anexo 02

A recíproca desta proposição não é necessariamente verdadeira.

Se fizermos a suposição que os segundos membros de (12) são zeros, e eliminando linearmente $dQ/dx_1, dQ/dx_2, \ldots, dQ/dx_m$, a partir dos primeiros membros, portanto, igualados a 0, nós deveremos obter uma equação final de constantes (coeficientes),

$$F (?_1, ?_1, ..., ?_1, ..., ?_m, ?_m, ..., ?_m) = 0 \qquad (15)$$

a qual, se satisfeita, indicará, que as condições propostas em (14), podem coexistir, sem zerar de forma simultânea:

$dQ/dx_1, dQ/dx_2, \ldots, dQ/dx_m$

Estas circunstâncias são notadas aqui, porque elas serão encontradas, como a causa de certas peculiaridades na solução final. Em relação à natureza e o significando da condição (14) é suficiente para o presente caso que isto analiticamente corresponda às variáveis $y_1, y_2, ..., y_m$ relativas às variáveis $x_1, x_2, ..., xm$ em que os valores não se tornam arbitrários ou infinitos.
Nós procedemos ao exame dos casos em que os sistemas (13) e (14) são sempre compatíveis.
O sistema (13) aplicado em Q dado em (9) se torna:

(16) ver anexo 02

Estas equações são homogêneas e de grau (n-1), veremos agora sob que condições elas são satisfeitas. A primeira seria supor $x_1, x_2, ..., x_m$, valendo zero simultaneamente, mas isto não conduz a nenhum resultado.
A nossa atenção será dirigida para procedimentos de eliminar as variáveis por meio da diferenciação; iniciamos por duas equações de grau n,

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + k = 0 \qquad (17)$$

$$a'x^n + b'x^{n-1} + c'x^{n-2} + ... + k' = 0 \qquad (18)$$

aplicamos o processo de diferenciação, na primeira fase obteríamos equações de grau (n-1), na segunda de grau (n-2) e desse modo em cada estágio sucessivo do processo diminuímos um grau das equações resultantes, finalmente chegando em equações lineares que envolvem somente os coeficientes *a, b, a´* e *b´*.
Assumindo este método, faremos o mesmo com as formas homogêneas, atingindo a condição de linearidade, e portanto a estrutura necessária para o cálculo do invariante que chamaremos nos termos de Boole (1841) de operador *?* sobre *Q* (forma homogênea ou polinômio homogêneo).

O método de Boole (1841) para os invariantes *?*

Seja *?* o operador sobre a forma homogênea de grau 2, de modo que *?(Q)* seja um invariante relativo a esta forma.
Adotamos a notação comum *Q* para uma forma homogênea de grau 2:

$Q = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ (19)

Diferenciando em relação a *x* e depois a *y*, dividindo por 2, temos:

$Ax + By = 0,$
$Bx + Cy = 0,$

(para $dQ/dx = 2Ax+2By$, e $dQ/dy = 2Bx+2Cy$), portanto *?(Q)* é:

$?(Q) = B^2 – AC$, ou $AC – B^2$ (20)

Novamente, temos

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dzy + 2Exz + 2Fxy$ (21)

Diferenciando em relação às respectivas variáveis, temos:

(22) ver anexo 03

portanto, *?(Q)* é:

$?(Q) = ABC + 2DEF – (AD^2 + BE^2 + CF^2)$ (23)

Se *Q* é da forma:

$Q = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3$ (24)

Diferenciando em relação às respectivas variáveis, e dividindo por 3, temos:

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$
$Bx^2 + 2Cxy + Dy^2 = 0$

eliminando x^2 e y^2, e dividindo os resultados por *y* e respectivamente, por *x*, obtemos:

(25) ver anexo 03

que são lineares.

Conseqüentemente, *?(Q)* é:

$?(Q) = (AD – BC)^2 – 4(B^2 – AC)(C^2 – BD)$ (26)

e de um modo semelhante podemos proceder para casos mais complicados.

Ou seja, *?(Q)* são invariantes das formas homogêneas apresentadas.

Invariante

Um invariante de uma forma homogênea (Boole, 1841) ou quântico (Cayley, 1854) é uma função *f* dos coeficientes da forma ou quântico transformado que se iguala à mesma função *f* dos coeficientes da forma original multiplicado por uma função dos coeficientes da transformação linear.

Seja $(a_0, a_1, a_2, ..., a_p)(x, y)^p$ o quântico de grau p, notação adotada por Cayley (1854), em Elliott (1895) a notação para o quântico de grau p é:

(27) ver anexo 03

Para obter um invariante desse quântico (forma ou polinômio homogêneo), necessitamos da transformação linear:

$x = lX + mY,$
$y = l'X + m'Y$

Substituindo-a no quântico (forma ou polinômio homogêneo) original, obtemos:

$(A_0, A_1, A_2, ..., A_p)(X, Y)^p$, sendo $A_0, A_1, A_2, ..., A_p$ funções de $a_0, a_1, a_2, ...,a_p$ e l, m, l', m' .

A função $f(a_0, a_1, a_2,...,a_p)$ será um invariante se atender a condição:
$f(A_0, A_1, A_2, ...A_p) = ? (l, m, l', m')f(a_0, a_1, a_2, ..., a_p)$, sendo $?(l, m, l', m')$ função dos coeficientes da transformação linear.

5. Considerações Finais

Boole (1841) procede diretamente na obtenção dos invariantes, por seu método de diferenciação até chegar em um sistema de equações lineares que são referidas a um determinante de coeficientes, ou seja *?(Q)*, sabemos que se trata de um invariante pois satisfaz:

$AC – B^2 = (lm' – ml')^2 (ac – b^2)$, sendo $Q' = ax^2 + 2bxy + cy^2$ o polinômio homogêneo, a transformação linear $x = lX + mY$ e $y = l'X + m'Y$ e o polinômio transformado $Q = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$.

Referências Bibliográficas

BOOLE, G., 1841. Exposition of a general theory of linear transformations. **The Cambridge Mathematical Journal**. vol.III, November, Part. I.
CRILLY, T. **Arthur Cayley Mathematician Laureate of the Victorian Age**. Baltimore, The John Hopkins University Press, 2004.
_______ The Rise of cayley's Invariant Theory (1841-1862). **Historia Mathematica**. V.13, 1986, p. 241-254.
_______The young Arthur Cayley. **Notes and Records of the Royal Society**. London, v.52 (2), 1998, pp.267-282.
CAYLEY, A. An Introductory memoir upon quantics. **Philosophical Transaction of Royal Society of London**. London, 1854b, 144, pp. 244-258.
Transaction of Royal Society of London. London, 1854b, 144, pp. 244-258.
ELLIOT, E. B. **An Introduction to the Algebra of Quantics**, Oxford: At the Claredon Press, 1895.
FISHER, S.C. The Death of a Mathematical theory : a Study in the Sociology of Knowledge. **Archive for the History of Exact Sciences**, 3, 1996.
PARSHALL, K. H., The British development of the theory of invariants (1841-1895). **BSHM Bulletin**. 2006, 21, 186-199.
PARSHALL, K. H., **James Joseph Sylvester: Life and Work in letters**. Oxford, Clarendon Press: 1998.

$$\begin{cases} q = a_1 x_1{}^n + a_2 x_2{}^n \dots + a_m x_m{}^n + \Sigma\, a_t x_1{}^\alpha x_2{}^\beta \dots x_m{}^\mu \\ r = b_1 y_1{}^n + b_2 y_2{}^n \dots + b_m y_m{}^n + \Sigma\, b_t y_1{}^\alpha y_2{}^\beta \dots y_m{}^\mu \\ Q = A_1 x_1{}^n + A_2 x_2{}^n \dots + A_m x_m{}^n + \Sigma\, A_t x_1{}^\alpha x_2{}^\beta \dots x_m{}^\mu \\ R = B_1 y_1{}^n + B_2 y_2{}^n \dots + B_m y_m{}^n + \Sigma\, B_t y_1{}^\alpha y_2{}^\beta \dots y_m{}^\mu \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dQ}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_1} \,..+ \frac{dQ}{dx_m}\frac{dx_m}{dy_1} = \frac{dR}{dy_1} \\ \frac{dQ}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dQ}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_2} \,..+ \frac{dQ}{dx_m}\frac{dx_m}{dy_2} = \frac{dR}{dy_2} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{dQ}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_m} + \frac{dQ}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_m} \,..+ \frac{dQ}{dx_m}\frac{dx_m}{dy_m} = \frac{dR}{dy_m} \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \dots + \lambda_m y_m \\ x_2 = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 \dots + \mu_m y_m \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_m = \rho_1 y_1 + \rho_2 y_2 \dots + \rho_m y_m \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \dfrac{dQ}{dx_1} + \mu_1 \dfrac{dQ}{dx_2} \dots + \rho_1 \dfrac{dQ}{dx_m} = \dfrac{dR}{dy_1} \\ \lambda_2 \dfrac{dQ}{dx_1} + \mu_2 \dfrac{dQ}{dx_2} \dots + \rho_2 \dfrac{dQ}{dx_m} = \dfrac{dR}{dy_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_m \dfrac{dQ}{dx_1} + \mu_m \dfrac{dQ}{dx_2} \dots + \rho_m \dfrac{dQ}{dx_m} = \dfrac{dR}{dy_m} \end{cases} \qquad (12)$$

$$\frac{dQ}{dx_1} = 0, \quad \frac{dQ}{dx_2} = 0, \dots, \frac{dQ}{dx_m} = 0 \qquad (13)$$

$$\frac{dR}{dy_1} = 0, \quad \frac{dR}{dy_2} = 0, \dots, \frac{dR}{dy_m} = 0 \qquad (14)$$

$$\begin{cases} nA_1 {x_1}^{n-1} + \Sigma A_t \alpha {x_1}^{\alpha-1} {x_2}^{\beta} \dots {x_m}^{\mu} = 0 \\ nA_2 {x_2}^{n-1} + \Sigma A_t \beta {x_1}^{\alpha} {x_2}^{\beta-1} \dots {x_m}^{\mu} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ nA_m {x_m}^{n-1} + \Sigma A_t \mu {x_1}^{\alpha} {x_2}^{\beta} \dots {x_m}^{\mu-1} = 0 \end{cases} \qquad (16)$$

$$\begin{cases} Ax + Fy + Ez \\ Fx + By + Dz \\ Ex + Dy + Cz \end{cases} \qquad (22)$$

$$\begin{cases} 2(B^2 - AC)x - (AD - BC)y = 0 \\ (AD - BC)x - 2(C^2 - BD)y = 0 \end{cases} \qquad (25)$$

$$a_0 x^p + p a_1 x^{p-1} y + \frac{p(p-1)}{1 * 2} a_2 x^{p-2} y^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 * 2 * 3} a_3 x^{p-3} y^3 + \cdots + p a_{p-1} x y^{p-1} + a_p y^p \qquad (27)$$