16° Congresso de Iniciação Científica

TEORIA DOS INVARIANTES: FORMA QUADRÁTICA

Autor(es)

GISELE ZANUZI HEBFNER

Orientador(es)

ADRIANA CÉSAR DE MATTOS

Apoio Financeiro

FAPIC/UNIMEP

1. Introdução

O projeto que deu origem a esta iniciação cientifica é “A análise do processo de reconhecimento histórico na História da Matemática” de autoria de Mattos (FAP, 2004). O projeto maior busca responder sobre a emergência de Arthur Cayley na História da Matemática abordando dois aspectos em especial, as estruturas de reconhecimento e a epistemologia.

A relevância do presente trabalho se justifica por ser conseqüência de pesquisa que se inicia com a proposta do estudo histórico e sociológico sobre o trabalho do matemático Arthur Cayley. Encontramos pesquisadores tais como Tony Crilly na História da Matemática, na sociologia do conhecimento Allan Fischer e na Educação Matemática Steven Lerman. Naturalmente os diversos trabalhos se conectam um com os outros, contudo alguns deles possuem caráter matemático (epistemológico) outros, caráter sociológico (estruturas de reconhecimento).

Do ponto de vista da História da Matemática Boyer (1906) defende:

O século dezenove, mais do que qualquer período precedente, mereceu ser conhecido como Idade Áurea da Matemática. O que se acrescentou ao assunto durante esses cem anos supera de longe, tanto em quantidade quanto em qualidade, à produtividade total combinada de todas as épocas precedentes (p.419).

Duas contribuições revolucionárias na álgebra foram feitas, em 1843 e 1847, por matemáticos que ensinavam na Irlanda.

A primeira dessas foi a obra de Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) a segunda veio de George Boole (1815-1864). Os contribuidores mais prolíficos à álgebra do século dezenove porém foram os ingleses que passaram algum tempo na América, - Arthur Cayley (1821-1895) e J. J. Sylvester (1814-1897) – e foi principalmente na universidade de onde esses provinham, Cambridge, que se deu o aparecimento da Álgebra moderna (Boyer, 1906, p.419).

A Teoria dos Invariantes iniciada pelos matemáticos citados acima, com o foco principalmente em Arthur Cayley que foi proposto o estudo da forma quadrática binária.

2. Objetivos

Este estudo tem como objetivo principal calcular os invariantes da forma quadrática binária. Portanto é necessário:

- Definir quântico, invariante, co-variante;

- Apresentar um invariante da forma quadrática e demonstrar este fato.

3. Desenvolvimento

No início das atividades para a elaboração do projeto, a orientadora propôs a formação de um grupo de estudos sobre "A História da Álgebra no século XIX". No grupo participavam a orientadora, seus dois bolsistas e alunos do Curso de Licenciatura de Matemática e Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Metodista de Piracicaba que manifestaram interesse. Os encontros ocorreram durante as sextas-feiras até o início do mês de Dezembro, a partir de Janeiro até Julho os encontros passaram a ser nas quintas-feiras. Através destas reuniões em grupo, estudamos artigos de Arthur Cayley e os livros do Elliot (1895) e Boyer (1974).

Contudo, a principal fonte de material para a composição deste projeto foi concebida graças a diversos estudos no livro do Elliot (1895).

Além dos encontros do grupo em que recebíamos as orientações da professora Adriana Cesar Mattos, a bolsista Kelly Cristina Trinca Marchesi e eu estudávamos em outros horários, pois os nossos projetos utilizavam a mesma bibliografia. Traduzíamos os textos da bibliografia, que se encontravam em inglês, além de calcular os invariantes propostos pela orientadora, utilizando na maioria das vezes o software Maple.

4. Resultado e Discussão

A Teoria dos Invariantes consiste no estudo das propriedades intrínsecas das formas (polinômios), propriedades que não são afetadas por uma mudança de variáveis que do ponto de vista geométrico também se mantêm.

Uma função de qualquer número de x, y, z de variáveis,... que é racional integral e homogênea nessas variáveis, é chamado um quântico em x,y,z... Os coeficientes em um quântico são constantes até onde x,y,z... chegarem, sendo que a Idéia da variabilidade de x,y,z... é raramente introduzida.

Um invariante de um único quântico é uma função dos coeficientes do quântico, que precisa ser multiplicado por um fator que só é uma função dos coeficientes, em um esquema de substituição linear que deve produzir a mesma função dos coeficientes correspondentes no quântico original.

Quânticos do primeiro, segundo, terceiro, quarto,..., são as chamadas ordens de pth, sendo linear, quadráticas, cúbicas, quarternárias,..., p-ics. Assim por exemplo $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ é uma forma cúbica binária, e $ax^2 + by^2 +cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$ é uma forma quadrática.

Elliott (1895) trata dos quânticos binários que trazem a forma $a0xp +pa1x^{p-1}y + [(p(p-1)/1.2)a2x^{p-2}y^2] + [((p(p-1)(p-2))/1.2.3)a3x^{p-3}y^3 +...+ pap-1xy^{p-1} + apy^p$, o que podemos simbolizar por (a0, a1, a2, a3, ...ap) $(x, y)^p$.

Se em um quântico nós substituirmos cada uma das variáveis por uma soma de múltiplos das primeiras chegamos a um numeroso jogo de novas variáveis, se por exemplo, as variáveis envolvidas são x, y, z,..., chegamos no seguinte esquema:

x = l X + m Y + n Z + ...,
y = l' X + m' Y + n' Z + ..,
z = l'' X + m'' Y + n'' Z + ...,
....

Da mesma maneira, podemos a partir de x,y,z fazer uma transformação linear com X,Y,Z,... ou uma substituição linear no quântico, que é simplesmente chamada de transformação linear do quântico original.

Se tivermos um determinante cujos componentes são os coeficientes na ordem natural deles, das novas variáveis X, Y, Z,..., para as velhas x, y, z, ..., que estão adequadas nas filas e colunas, chamamos de "modulus" da substituição ou transformação, onde freqüentemente denotaremos, simplesmente, por M.

As variáveis originais x, y,z,... são usadas como uma regra para todo ser independente, sendo "ilegal" substituir para elas qualquer expressão em termos de variáveis novas em que não são todas independentes.

Um invariante de um único quântico é uma função dos coeficientes do quântico, que precisa ser multiplicado por um fator que só é uma função dos coeficientes, em um esquema de substituição linear que produzir a mesma função dos coeficientes correspondentes no quântico original.

Um invariante de dois ou mais quânticos nas mesmas variáveis é uma função de dois ou mais "jogos" de coeficientes. Esses quânticos precisam ser multiplicados por um fator que só é uma função dos coeficientes em um esquema de substituição linear se for feito igual à mesma função dos coeficientes correspondentes.

Um co-variante de um único quântico, ou de dois ou mais quânticos nas mesmas variáveis, é uma função das variáveis e dos coeficientes daquele quântico que têm propriedades iguais; isto é o de precisar ser multiplicado por um fator que só é uma função dos coeficientes em um esquema de substituição linear que é feito igual à mesma função das variáveis novas no máximo e dos coeficientes correspondentes no quântico.

Por exemplo, o p-ic binário: (a0, a1, a2, ...ap) $(x, y)^p$, seja transformado pela substituição linear:

$x = l X + m Y$,
$y = l' X + m' Y$,
e se torna:

(A0, A1, A2, ...Ap) $(X, Y)^p$,

onde A0, A1, A2, ...Ap são funções de a0, a1, a2, a3, ...ap , e l, m, l', m'.

Então f (a0, a1, a2, ...ap) será um invariante da forma:

f (A0, A1, A2, ...Ap) = D (l, m, l', m') f (a0, a1, a2, ...ap), e F (a0, a1, a2, ...ap, x, y) será um co-variante da forma:

F(A0, A1, A2, ...Ap, X,Y) = D (l, m, l', m') F (a0, a1, a2, ...ap, x, y).

Em todos os casos, o fator que só depende dos coeficientes no esquema de substituição que o identifica é o que expressa o fato de invariância ou co-variância e é assim do tipo *modulus* M.

Em particular para qualquer invariante ou co-variante de um quântico binário ou quânticos de binários o D (l, m, l', m') possui uma potencia de (lm' – l'm).

Há funções irracionais e fracionárias que têm a propriedade de invariância e co-variância. Contudo Elliot (1895) assume invariantes e co-variantes racionais e integrais, ambos nos coeficientes e nas variáveis.

Sendo $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$ (1) a quadrática binária, calculamos o seu invariante.

Seja $x = lX + mY$ e $y = l'X + m'Y$, agora substituindo em (1)

$u = a(lX + mY)^2 + 2b (lX+ mY)(l'X + m'Y) + c(l'X + m'Y)^2$,

$u = a (l^2x^2 + 2lmxy + m^2y^2) + 2b (ll'x^2 + lm'xy + l'mxy + mm'y^2) + c (l'^2x^2 + 2l'm'xy + m'^2y^2)$,

$u = al^2x^2 + 2almxy + am^2y^2 + 2b\, ll'x^2 + 2blm'xy + 2bl'mxy + 2bmm'y^2 + c\, l'^2x^2 + 2cl'm'xy + cm'^2y^2$,

$u = x^2(al^2 + 2b\, ll' + c\, l'^2) + 2xy\, (2alm + 2blm + 2bl'm + 2cl'm') + y^2(am^2 + 2bmm' + cm'^2)$,

Assim, $ax^2 + 2bxy + cy^2$ se torna $AX^2 + 2\, BXY + CY^2$,

Então, temos:

$A = al^2 + 2bll' + cl'^2$,

$B = alm + b (lm' + l'm) + cl'm'$,

$C = am^2 + 2bmm' + cm'^2$.

Conseqüentemente:

$AC - B^2 = (l^2m'^2 - 2ll'mm' + m^2l'^2) (ac - b^2) = M^2 (ac - b^2)$.

5. Considerações Finais

O resultado é o invariante ac – b2 da forma (a,b,c)(x,y) 2 , conhecido também como discriminante. Este conceito foi generalizado por Cayley e Sylvester principalmente no período 1840 a 1850 na Inglaterra.

Referências Bibliográficas

CRILLY, T. **Arthur Cayley Mathematician Laureate of the Victorian Age**. Baltimore, The John Hopkins University Press, 2004.

_______The Rise of cayley's Invariant Theory (1841-1862). **Historia Mathematica.** V.13, 1986, p. 241-254.

_______The young Arthur Cayley. **Notes and Records of the Royal Society.** London, v.52 (2), 1998, pp.267-282.

CAYLEY, A. An Introductory memoir on quantics. **Philosophical Transaction of Royal Society of London.** London, 1854b, 144, pp. 244-258.

Elliot, E. B. **An Introduction to the Algebra of Quantics**, Oxford: At the Claredon Press, 1895.

MATTOS,A.C. The process of recognition in the History of Mathematics**. Report.** London South Bank University, 2006.